

کد کنترل

223

A



شنبه

۱۴۰۲/۱۲/۱۲



## دوره جمع بندی دوینگ ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی  
دفترچه پاسخ ریاضی  
(جامع تابع / توابع نمایی و لگاریتمی)

| درس   | مسئول درس     | طراحان                         | ویراستاران                  |
|-------|---------------|--------------------------------|-----------------------------|
| ریاضی | محدثه شیخ علی | حسین شفیعی زاده - مهرداد کیوان | سجاد احمدی - فرشاد حسن زاده |

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

### اهمیت مبحث تابع و توابع نمایی و لگاریتمی در کنکور:

#### معرفی می‌کنم این شما و این هم دو تا از فصل‌های بسیار مهم کتاب، فصل تابع و فصل توابع نمایی و لگاریتمی.

این دو تا فصل از جذابترین و شیرین‌ترین فصل‌های ریاضی هستن، چون خیلی جمع و جور و خوش تست هستن و به قول اساتید هنر و سینما، فرم و محتوای خوبی دارن، خلاصه کمتر کسی توی این کره خاکی پیدا میشه که با این فصل‌ها حال نکنه.

جونم براتون بگه که از این دو تا فصل سرجمع حدود ۴ تا ۶ تست توی کنکور سوال میاد که واقعاً هر چقدر بخوان سختش کنن باز میشه حلشون کرد پس حواست باشه که توی سوال‌ها سوتی ندی و این تست‌ها رو مال خودت بکنی.

از مهمترین بخش‌های این دو تا فصل میشه به بخش‌های ویژگی‌های لگاریتم، معادله‌های نمایی و لگاریتمی، نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی، انتقال توابع، ترکیب و وارون توابع اشاره کرد. البته یادت باشه که خیلی از وقت‌ها از این دوتا فصل به صورت ترکیبی سوال میدن، مثلاً میان تابع لگاریتمی رو میبرن تو فاز انتقال توابع، پس مراقب باش که اخیراً رد پای سوال‌های ترکیبی، توی ریاضی هم مشاهده شده، پس بزن بریم که توی این آزمون کلی تست‌های خوب انتظارمون رو میکشه پس تا میتونی روی رسم نمودار توابع هم مسلط باش که توی حل خیلی از تست‌ها غوغا می‌کنه و کار رو برامون درمیاره!

#### پیش‌نیازهای مطالعه این بخش کدام مباحث هستند؟

با توجه به اینکه تابع مفهوم جدیدی است که در دوران دبیرستان با آن آشنا می‌شوید، بنابراین برای یادگیریش نیاز به مرور خاصی نیست. لگاریتم و توابع نمایی هم بخش جدیدی است که یک پیش‌نیاز مهم دارد و آن هم تابع است که ما خودمان آن را آورده‌ایم!

#### این بخش‌ها در کدام قسمت‌های دیگر کاربرد دارند؟

برای حل سوالات بخش حد و پیوستگی و مشتق نیاز مبرم به تسلط روی مباحث این دو فصل مخصوصاً فصل تابع دارید. پس به خوبی آن‌ها را یاد بگیرید.

#### از این بخش در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

#### فصل تابع

| ۱۳۹۸                           | ۱۳۹۹                                                                       | ۱۴۰۰                                                                      | ۱۴۰۱                                                              | ۱۴۰۱ (دی)                                                                             | ۱۴۰۲                                                                                                         |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ۲                              | ۵                                                                          | ۴                                                                         | ۵                                                                 | ۴                                                                                     | ۵                                                                                                            |
| توابع صعودی و نزولی تابع وارون | انتقال توابع ترکیب توابع وارون تابع وارون تابع وارون (ترکیب با تابع نمایی) | دامنه تابع رسم نمودار تابع جزء صحیح انتقال توابع انتقال توابع+ تابع وارون | تابع ثابت انتقال توابع وارون تابع ترکیب توابع توابع صعودی و نزولی | توابع صعودی و نزولی انتقال توابع وارون تابع ترکیب دامنه تابع (ترکیب با تابع لگاریتمی) | انتقال توابع تابع ترکیب توابع توابع صعودی و نزولی (ترکیب با لگاریتم) وارون تابع تعریف تابع به صورت زوج مرتبی |

#### فصل لگاریتم و تابع نمایی

| ۱۳۹۸                               | ۱۳۹۹                                                                  | ۱۴۰۰                                             | ۱۴۰۱                              | ۱۴۰۱ (دی)                                                              | ۱۴۰۲                                                                             |
|------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| ۲                                  | ۳                                                                     | ۲                                                | ۲                                 | ۳                                                                      | ۳                                                                                |
| معادله نمایی نمودار توابع لگاریتمی | ویژگی‌های لگاریتم نمودار توابع نمایی تابع نمایی (ترکیب با تابع وارون) | دامنه تابع لگاریتمی معادله لگاریتمی معادله نمایی | قوانین لگاریتم نمودار توابع نمایی | ویژگی‌های لگاریتم دامنه تابع لگاریتمی (ترکیب با دامنه توابع تابع نمایی | تابع لگاریتمی (ترکیب با توابع صعودی و نزولی) ویژگی‌های لگاریتم ویژگی‌های لگاریتم |

#### پیش‌بینی شما برای کنکور بعدی چیست؟

با توجه به روند اخیر، پیش‌بینی می‌شود تعداد ۴ سوال برای بخش توابع و تعداد ۲ - ۳ سوال برای بخش لگاریتم و تابع نمایی داشته باشیم.

- ۱- طول نقاط نمودار  $y = 2f(1 - \frac{x}{4})$  را در راستای افقی نصف کرده و نمودار حاصل را ۴ واحد به چپ انتقال می‌دهیم. با فرض یک‌به‌یک بودن  $f$ ، نمودار حاصل، نمودار اولیه را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۲ (۱)                      -۴ (۲)                      -۸ (۳)                      ۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

**نکته‌ای پرمغز و تغز!**

اگر تابع  $f(x)$ ، یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه:  $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

**پاسخ تشریحی:**

ابتدا به جای  $x$ ،  $2x$  قرار می‌دهیم و در تابع حاصل، به جای  $x$ ،  $x + 4$  قرار می‌دهیم.

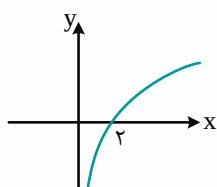
$$y = 2f(1 - \frac{x}{4})$$

$$y = 2f(1 - \frac{2x}{4}) = 2f(1 - x) \quad \text{انقباض افقی}$$

$$y = 2f(1 - (x + 4)) = 2f(-x - 3) \quad \text{انتقال خطی}$$

$$\Rightarrow 2f(-x - 3) = 2f(1 - \frac{x}{4}) \Rightarrow -x - 3 = 1 - \frac{x}{4} \Rightarrow x = -8$$

● گروه آموزشی ماز ●



- ۲- نمودار تابع  $y = f(x)$  شکل مقابل است. دامنه تعریف  $g(x) = \sqrt{xf(2-x)}$  کدام است؟

(۱)  $[0, 2]$

(۲)  $\{0, 2\}$

(۳)  $(-\infty, 2]$

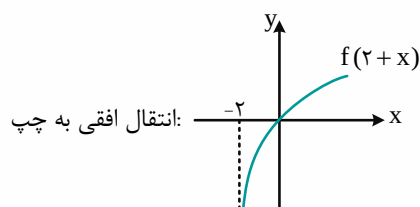
(۴)  $\{0\}$

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

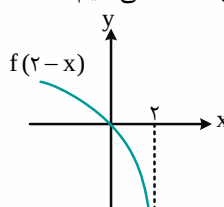
**پاسخ تشریحی:**

نمودار  $f(2-x)$  را رسم می‌کنیم و زیر رادیکال را تعیین علامت می‌کنیم:



انتقال افقی به چپ:

قرینه نسبت به محور  $y$  ها



| $x$       | $-\infty$ | $0$ | $2$ |
|-----------|-----------|-----|-----|
| $f(2-x)$  | +         | ۰   | -   |
| $x$       | -         | ۰   | +   |
| $xf(2-x)$ | -         | ۰   | -   |

فقط  $x = 0$  در دامنه تابع وجود دارد.

● گروه آموزشی ماز ●

- ۳- هرگاه  $f$  تابعی یک‌به‌یک باشد به طوری که  $g(x) = f(1 + \frac{x}{3})$ ، با کدام تبدیل می‌توانیم از نمودار  $y = f^{-1}(x)$  به نمودار  $y = g^{-1}(x)$  برسیم؟

(۲) انقباض و انتقال افقی

(۴) انبساط و انتقال عمودی

(۱) انقباض و انتقال عمودی

(۳) انبساط و انتقال افقی

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

**اینم از اون نکته‌هاست!**

برای تابع  $f(x)$  داریم:

$$\left. \begin{aligned} |a| > 1 &: \text{انقباض افقی} \\ |a| < 1 &: \text{انبساط افقی} \end{aligned} \right\} \leftarrow f(ax)$$

$$\left. \begin{aligned} |a| > 1 &: \text{انبساط عمودی} \\ 0 < |a| < 1 &: \text{انقباض عمودی} \end{aligned} \right\} \leftarrow af(x)$$

$$g(x) = f\left(1 + \frac{x}{3}\right) = a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = g^{-1}(a) \\ 1 + \frac{x}{3} = f^{-1}(a) \end{cases} \Rightarrow g^{-1}(a) = -3 + 3f^{-1}(a)$$

پس  $f^{-1}(a)$  را ۳ برابر می‌کنیم و ۳ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

گروه آموزشی ماز

۴- وارون تابع  $f(x) = \sqrt{4-2x}$  را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم. شکل حاصل را چند واحد در راستای افقی انتقال دهیم تا نمودار  $f$  را در نقطه‌ای به طول ۶- قطع کند؟

$$4 - \sqrt{8} \quad (4)$$

$$4 - \sqrt{12} \quad (3)$$

$$6 - \sqrt{12} \quad (2)$$

$$6 - \sqrt{8} \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

بچه‌ها به نکته زیر به چشم یک دوست! نگاه کنید.

$k > 0$ : انتقال  $|k|$  واحد به چپ  
 $f(x+k)$  یعنی انتقال افقی  
 $k < 0$ : انتقال  $|k|$  واحد به راست

$$y = \sqrt{4-2x} \Rightarrow y \geq 0, y^2 = 4-2x \Rightarrow x = \frac{4-y^2}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(4-x^2); x \geq 0$$

$$y = \frac{1}{2}(4-x^2); x \geq 0 \xrightarrow{\text{قرینه به مبدأ}} -y = \frac{1}{2}(4-(-x)^2); x \leq 0$$

$$y = \frac{1}{2}(x^2-4) \xrightarrow{\text{انتقال در راستای افقی}} y = \frac{1}{2}(x+k)^2-2$$

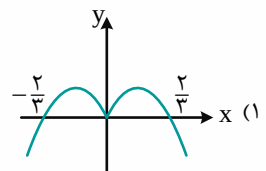
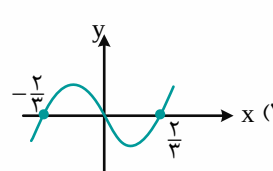
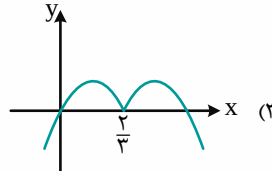
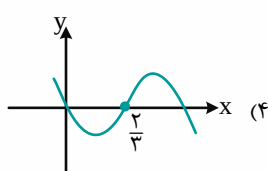
حال تابع به دست آمده را با  $f$  قطع می‌دهیم و  $x = -6$  جواب است.

$$\frac{1}{2}(k-6)^2-2 = \sqrt{4+12} = 4 \Rightarrow (k-6)^2 = 12 \Rightarrow \begin{cases} k-6 = \sqrt{12} \Rightarrow k = 6+\sqrt{12} \text{ غ قق} \\ k-6 = -\sqrt{12} \Rightarrow k = 6-\sqrt{12} \end{cases}$$

زیرا  $x \leq 0$ ، پس  $k-6 \leq 0$  یعنی  $k \leq 6$ .

گروه آموزشی ماز

۵- اگر برای هر  $x$  تساوی  $f(3x-2) + f(2-3x) = 0$  برقرار باشد، نمودار  $f$  کدام می‌تواند باشد؟



پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۱)

از کجا بفهمیم نمودار تابع نسبت به مبدأ مختصات تقارن دارد؟

اگر در تابع  $f(x)$  داشته باشیم:  $f(x) = -f(-x)$ ، آن گاه نسبت به مبدأ مختصات تقارن دارد.

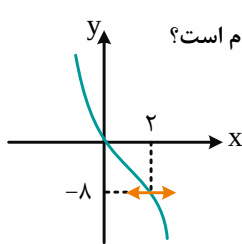
پاسخ تشریحی:

فرض کنید  $t = 3x - 2$ ، پس:

$$f(t) + f(-t) = 0 \Rightarrow f(t) = -f(-t)$$

یعنی نمودار  $f(x)$  نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. فقط گزینه ۲ به این صورت است.

گروه آموزشی ماز



۶- اگر  $y = f(x)$  یک سهمی باشد و نمودار تابع  $g(x) = -x^3 + f(x)$  شکل مقابل باشد، دامنه تعریف  $y = \log_p^{(f(x))}$  کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
- (۲)  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- (۳)  $(-2, 0)$
- (۴)  $(0, 2)$

پاسخ گزینه ۲ (متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

دامنهٔ لگاریتم و مدامنٔ لگاریتم!

برای  $f(x) = \log_{h(x)}^{g(x)}$  داریم:  $D_{f(x)} = \{x \mid g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1\}$

پاسخ تشریحی:

نمودار  $g$  از مبدأ عبور کرده است، پس:

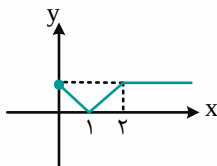
$$g(x) = -(x-2)^3 - 8 = -x^3 + 6x^2 - 12x$$

$$\Rightarrow f(x) = 6x^2 - 12x$$

دامنهٔ تابع لگاریتمی به گونه‌ای است که  $f(x)$  باید مثبت باشد.

$$f(x) > 0 \Rightarrow 6x^2 - 12x > 0 \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 2$$

گروه آموزشی ماز



۷- نمودار تابع  $y = -f(2-x)$  شکل مقابل است. تابع  $y = f(\frac{1-x}{3})$  در کدام بازه صعودی اکید است؟

- (۲)  $[\frac{2}{3}, 1]$
- (۴)  $[-5, -2]$

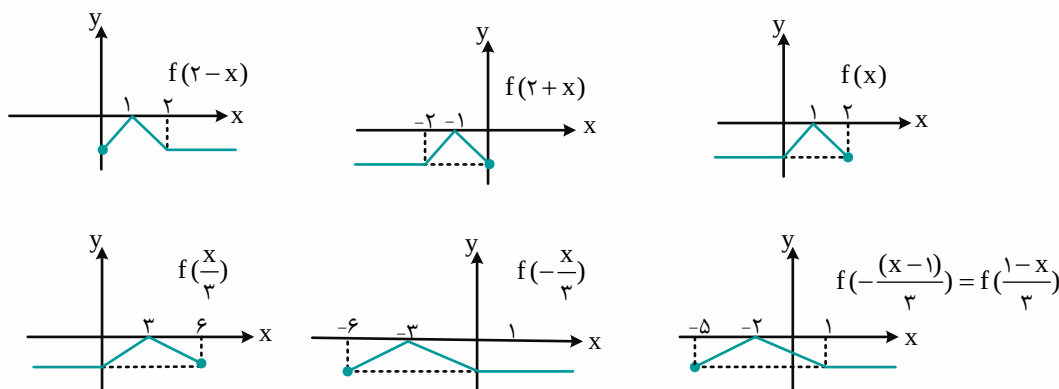
- (۱)  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$
- (۳)  $[-2, 1]$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۱)

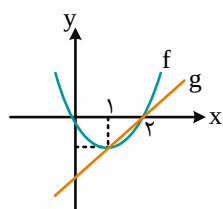
فب رسیدیم به یکنوایی توابع!

تابع  $f(x)$  صعودی اکید است، هرگاه:  $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

نمودار تابع  $f(x)$  و سپس نمودار تابع  $f(\frac{1-x}{3})$  را رسم می‌کنیم.



گروه آموزشی ماز



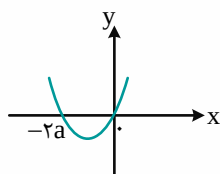
۸- نمودار سهمی  $f$  و خط  $g$  به صورت مقابل است. نمودار تابع  $f \circ g^{-1}(x)$  از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟

- (۱) اول
- (۲) دوم
- (۳) سوم
- (۴) چهارم

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

فرض کنید  $f(x) = ax(x-2)$  و  $g(x) = a(x-2)$  باشد، دقت کنید که شرط  $f(1) = g(1)$  باید برقرار باشد:  $(a > 0)$



$$g^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + 2$$

$$f \circ g^{-1}(x) = a\left(\frac{1}{a}x + 2\right)\left(\frac{1}{a}x + 2 - 2\right) = x\left(\frac{1}{a}x + 2\right)$$

نمودار تابع  $f \circ g^{-1}$  در نقاط  $x = 0$  و  $x = -2a$  محور  $x$  را قطع می‌کند، پس از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.

گروه آموزشی ماز

۹- توابع  $f(x) = |x+1| + 2a - 3$  و  $g(x) = 6 + b|x-4|$  در بازه  $[-1, 4]$  با هم برابرند، مقدار  $g \circ f(b) - f \circ g(a)$  کدام است؟

- (۱) -۱
- (۲) -۲
- (۳) -۳
- (۴) -۴

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

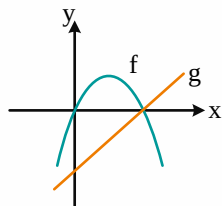
تساوی دو تابع دیگه چیه!

دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  با هم برابرند، هرگاه:  $D_f = D_g : A$  ,  $f(x) = g(x) : B$  باشد.

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 4 &\Rightarrow \begin{cases} |x+1| = x+1 \\ |x-4| = 4-x \end{cases} \\ f(x) = g(x) &\Rightarrow x+1+2a-3 = 6+b(4-x) \Rightarrow x+2a-2 = -bx+6+4b \\ &\Rightarrow \begin{cases} 1 = -b \\ 2a-2 = 6+4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases} \\ &\Rightarrow f(x) = |x+1| + 1, \quad g(x) = 6 - |x-4| \\ g \circ f(b) - f \circ g(a) &= g \circ f(-1) - f \circ g(2) = g(1) - f(4) = 3 - 6 = -3 \end{aligned}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- نمودار سهمی  $f(x) = 4x - x^2$  و تابع خطی  $y = g(x)$  در شکل روبه‌رو داده شده است. اگر  $y = f(x) + (x+1)g(x) + k$  تابع همانی باشد،  $k$  چه عددی است؟



- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۵)

زشته از ریاضی دهم نکته نگیم!

تابع همانی: اگر تابع  $f(x)$  به صورت مقابل باشد، یک تابع همانی است.  $f(x) = x$

پاسخ تشریحی:

$$f(x) = 4x - x^2 \Rightarrow A \left| \begin{matrix} 4 \\ \end{matrix} \right., \quad g(x) = \alpha(x - 4) = \alpha x - 4\alpha$$

(A نقطه تقاطع  $f$  با  $g$  است)

$$y = (4x - x^2) + (x+1)(\alpha x - 4\alpha) + k$$

قرار است ساده شده تابع فوق تابعی همانی باشد، پس:

$$y = 4x - x^2 + \alpha x^2 - 4\alpha x + \alpha x + k = (\alpha - 1)x^2 + (4 - 3\alpha)x + k - 4\alpha$$

چون قرار است تابع همانی باشد، پس:

$$\alpha - 1 = 0 \Rightarrow y = x + k - 4 \Rightarrow k - 4 = 0 \Rightarrow k = 4$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- اگر  $f(x) = x + [-2x]$  و  $g(x) = [x - f(-x)]$ ، کدام تابع، تابعی ثابت است؟

- (۱)  $g(x) - x$       (۲)  $g(x)$       (۳)  $g(x) + x$       (۴)  $g(x) - 2x$

پاسخ: گزینه ۲ (آسان - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۳)

خیلی زشت تر هم میشه اگه تابع همانی رو بگیریم ولی تابع ثابت رو توضیح ندیم!

تابع ثابت: اگر تابع  $f(x)$  به صورت مقابل باشد، یک تابع ثابت است.  $f(x) = c$

پاسخ تشریحی:

ابتدا ضابطه  $g(x)$  را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x) = [x - (-x + [2x])] = [2x - [2x]] = [2x] + (-[2x]) = 0$$

پس  $g$  تابعی ثابت است.

گروه آموزشی ماز

۱۲- اگر  $f(x) = \sqrt{x-2} - 3\sqrt{6-x}$  و  $g(x) = 1 + \sqrt{x-3}$  دامنه تعریف  $y = (f+g) \circ g$  کدام است؟

- (۱)  $[3, 28]$       (۲)  $[2, 7]$       (۳)  $[3, 7]$       (۴)  $[7, 28]$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

دامنه ترکیب توابع رو بلد یابته بگیریم!

دامنه تابع  $h(x) = f \circ g(x)$  برابر است با:  $D_{h(x)} = \{x \mid x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

پاسخ تشریحی:

$$D_{(f+g) \circ g} = \{x : x \in D_g, g(x) \in D_{f+g}\} \quad x \in D_g \Rightarrow x \geq 3 \quad (1)$$

$$D_f = 2 \leq x \leq 6 \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = [3, 6]$$

$$g(x) \in (D_f \cap D_g) \Rightarrow 3 \leq 1 + \sqrt{x-3} \leq 6 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x-3} \leq 5 \Rightarrow 7 \leq x \leq 28 \quad (2)$$

با اشتراک (۱) و (۲) پس در نهایت،  $D_y = [7, 28]$  می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۳- فرض کنید  $|x+1|-2x = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ -f(x) & x \leq 0 \end{cases}$  باشد. نمودار تابع  $y=f(x)$  از کدام ناحیه مختصات عبور نمی کند؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

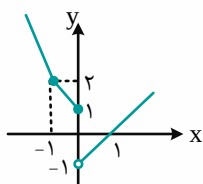
پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳)

**پاسخ تشریحی:**

ضابطه  $f$  را در دو حالت  $x > 0$  و  $x \leq 0$  پیدا می کنیم و سپس داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - |x+1| & x > 0 \\ -2x + |x+1| & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 0 \\ -x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ -3x-1 & x < -1 \end{cases}$$



از ناحیه سوم عبور نمی کند.

گروه آموزشی ماز

۱۴-  $f$  تابعی خطی و صعودی اکید است. اگر  $y=f(f(x)+4)$  تابعی همانی باشد، دامنه تعریف  $y=\sqrt{f^{-1}(x+f(x))}$  کدام است؟

- (۱)  $[0, +\infty)$  (۲)  $[0, 1]$  (۳)  $[-1, 1]$  (۴)  $[-1, 0]$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

**ارتباط یکنوایی  $f$  و  $f^{-1}$  رو بهت یاد می دیم اینجا!**

اگر  $f$  صعودی اکید باشد  $\leftarrow f^{-1}$  صعودی اکید است.

اگر  $f$  نزولی اکید باشد  $\leftarrow f^{-1}$  نزولی اکید است.

**پاسخ تشریحی:**

فرض کنید  $f(x) = ax + b$  باشد، به طوری که  $a > 0$  است.

$$y = f(f(x) + 4) = f(ax + b + 4) = a(ax + b + 4) + b = a^2x + ab + 4a + b$$

اگر این تابع همانی باشد، پس:

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ ab + 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = x - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 2$$

$$f^{-1}(x + f(x)) \geq 0 \xrightarrow{f^{-1} \text{ اکیدا صعودی}} x + f(x) \geq -2$$

$$\Rightarrow x + x - 2 + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- اگر  $f(x) = a - \sqrt{3a - 4 - x}$  به طوری که توابع  $y=f \circ f^{-1}(x)$  و  $y=f^{-1} \circ f(x)$  با هم برابر باشند، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

**یه فوت کمزگری جالب!**

دو تابع  $f \circ f^{-1}$  و  $f^{-1} \circ f$  زمانی با هم برابرند که:  $D_f = D_{f^{-1}}$  باشد و می دانیم که  $D_{f^{-1}}$  برابر  $R_f$  است، پس  $D_f = R_f$  باید باشد.

**پاسخ تشریحی:**

دامنه تابع  $f \circ f^{-1}(x)$  برابر برد  $f$  و دامنه  $f^{-1} \circ f(x)$  برابر دامنه  $f$  است، پس باید دامنه و برد  $f$  برابر باشند.

$$\begin{cases} D_f : 3a - 4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3a - 4 \\ R_f : y \leq a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 3a - 4 \Rightarrow a = 2$$

● گروه آموزشی ماز ●

۱۶- اگر  $f^{-1}(x) = 8x^3 + 3x$  و  $g^{-1}(x) = ax^3 + bx$  به طوری که  $f(x) = 2g(\frac{x}{3})$  مقدار  $3a - b$  کدام است؟

۶۶ (۴)

۵۶ (۳)

۵۸ (۲)

۶۲ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی:

$$f(x) = 2g(\frac{x}{3}) = k \Rightarrow \begin{cases} f(x) = k \Rightarrow x = f^{-1}(k) \\ g(\frac{x}{3}) = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{x}{3} = g^{-1}(\frac{k}{2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(k) = 2g^{-1}(\frac{k}{2})$$

$$\Rightarrow 8k^3 + 3k = 2(a(\frac{k}{2})^3 + b(\frac{k}{2}))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8 = \frac{2a}{8} \Rightarrow a = \frac{64}{3} \\ 3 = \frac{2b}{2} \Rightarrow b = 3 \end{cases} \Rightarrow 3a - b = 62$$

● گروه آموزشی ماز ●

۱۷- برد تابع  $f(x) = \sqrt{4 \log_3^x + \log_x^{16}}$  با فرض  $x > 1$  کدام است؟

$[2\sqrt{2}, 4]$  (۴)

$[2\sqrt{2}, +\infty)$  (۳)

$[4, +\infty)$  (۲)

$[1, 2\sqrt{2}]$  (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

فرض کنید  $t = \log_3^x$  باشد، چون  $x > 1$  است، پس  $t > 0$  است.

$$P = 4 \log_3^x + \log_x^{16} = 4t + \frac{4}{t} = (2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}})^2 + 8$$

بنابراین  $P \geq 8$  و  $f(x) \geq \sqrt{8}$  است. یعنی برد  $f$  بازه  $[2\sqrt{2}, +\infty)$  است.

● گروه آموزشی ماز ●

۱۸- اگر  $f(x) = \frac{4x}{3-x}$  و وارون تابع  $y = f \circ f(x)$  به صورت  $y = \frac{ax}{7x+b}$  است. مقدار  $b - a$  کدام است؟

-۹ (۴)

۷ (۳)

۹ (۲)

-۶ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

مازیا!!! اینک وارون تابع همگرافیک را به راحتی فرا بگیرید...

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

پاسخ تشریحی:

$$f(x) = \frac{4x}{3-x} \Rightarrow f \circ f(x) = \frac{4(\frac{4x}{3-x})}{3 - (\frac{4x}{3-x})} \Rightarrow f \circ f(x) = \frac{16x}{9-7x} = \frac{16x}{-7x+9}$$

$$(f \circ f)^{-1}(x) = \frac{-9x}{-7x-16} = \frac{9x}{7x+16} \Rightarrow a = 9, b = 16 \Rightarrow b - a = 7$$

۱۹- هرگاه  $f(x) = x + 4\sqrt{x-4}$  ضابطه  $f^{-1}(4x)$  کدام است؟

$$y = (\sqrt{2x} - 2)^2 + 4 \quad (4) \qquad 4y = (\sqrt{2x} - 1)^2 \quad (3) \qquad y = 4(\sqrt{x} - 1)^2 - 4 \quad (2) \qquad y = 4(\sqrt{x} - 1)^2 + 4 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

**پرده بعدی نمایش، یافتن ضابطه تابع وارون!**

برای یافتن ضابطه وارون تابع  $f$ ، ابتدا جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم. سپس  $y$  را بر حسب  $x$  پیدا می‌کنیم و در نهایت نیز به جای  $y$ ،  $f^{-1}(x)$  قرار می‌دهیم. همین!

پاسخ تشریحی:

$$f(x) = x + 4\sqrt{x-4} - 4 + 4 = x - 4 + 4\sqrt{x-4} + 4$$

$$f(x) = (\sqrt{x-4} + 2)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x} - 2)^2 + 4$$

$$f^{-1}(x) = x - 4\sqrt{x} + 8 \Rightarrow f^{-1}(4x) = 4x - 8\sqrt{x} + 8$$

$$f^{-1}(4x) = 4(\sqrt{x} - 1)^2 + 4$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- هرگاه  $f(x) = 4^x + 2^{x+2}$  به طوری که  $f^{-1}(x) = \log_4^g(x)$  ضابطه  $g^{-1}(x)$  کدام است؟

$$x^2 - 4 \quad (4) \qquad x^2 - 4x \quad (3) \qquad x^2 + 4x \quad (2) \qquad x^2 + 4 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ تشریحی:

$$f(x) = (2^x + 2)^2 - 4$$

برای محاسبه ضابطه وارون، جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم:

$$x = (2^y + 2)^2 - 4 \Rightarrow 2^y + 2 = \sqrt{x+4} \Rightarrow y = \log_2(\sqrt{x+4} - 2)$$

پس  $g(x) = \sqrt{x+4} - 2$ ، حال وارون  $g$  را محاسبه می‌کنیم.

$$x = \sqrt{y+4} - 2 \Rightarrow y = (x+2)^2 - 4 \Rightarrow g^{-1}(x) = x^2 + 4x$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- اگر  $12^x = 2$  و  $5^y = 12$  باشد، حاصل  $5^{1+xy}$  کدام است؟

$$10 \quad (4) \qquad 18 \quad (3) \qquad 9 \quad (2) \qquad 6 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ (آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

**یه خاصیت جالب از توان‌ها!**

برای  $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$  ( $a > 0$ ) داریم:

پاسخ تشریحی:

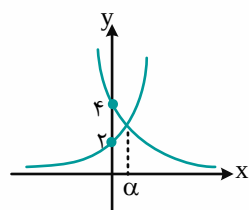
از ویژگی‌های تابع نمایی استفاده می‌کنیم:

$$5^{1+xy} = 5^1 \times 5^{xy} = 5^1 \times (5^y)^x = 5 \times 12^x = 5 \times 2 = 10$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- نمودار توابع  $f(x) = a.b^{2x}$  و  $g(x) = b.a^{-2x}$  به صورت مقابل است. حاصل  $\log_{ab}^3 \alpha$  کدام است؟

$$-\frac{1}{2} \quad (2) \qquad -\frac{1}{3} \quad (1) \qquad -1 \quad (4) \qquad -\frac{1}{4} \quad (3)$$



پاسخ: گزینه ۱  (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

 **نمای‌ها کی صعودی می‌شن، کی نزولی می‌شن؟**

برای تابع  $f(x) = a^x$  داریم:

$a > 1$  : تابع  $f(x)$  صعودی اکید است.

$0 < a < 1$  : تابع  $f(x)$  نزولی اکید است.

**پاسخ تشریحی:**

تابع صعودی دارای عرض از مبدأ ۲ و تابع نزولی دارای عرض از مبدأ ۴ است. اگر فرض کنیم  $f$  صعودی است، آن‌گاه:

$$\begin{cases} f(0) = a = 2 \Rightarrow f(x) = 2 \times 2^x \\ g(0) = b = 4 \Rightarrow g(x) = 4 \times 2^{-x} \end{cases}$$

پس فرض صعودی بودن  $f$  صحیح است. (در حالت فرض نزولی بودن  $f$ ، به تناقض می‌رسیم.)

$$f(\alpha) = g(\alpha) \Rightarrow 2 \times 2^{2\alpha} = 4 \times 2^{-2\alpha} \Rightarrow 2^{4\alpha+1} = 2^{2-2\alpha}$$

$$\Rightarrow 1 + 4\alpha = 2 - 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

● — گروه آموزشی ماز — ●

۲۳- توابع  $f(x) = \log_2^{9+x}$  و  $g(x) = 2^{2x} + 5$  مفروض‌اند. مجموع طول نقاط برخورد نمودار توابع  $f^{-1}$  و  $g$  کدام است؟

$\log_2^{12}$  (۱)

$\log_2^{14}$  (۲)

$\log_2^{15}$  (۳)

$\log_2^{18}$  (۴)

پاسخ: گزینه ۲  (متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

 **نکته‌ای بسیار مهم در حل سوالات لگاریتمی و نمایی:**

گاهی اوقات تغییر متغیر تنها راه‌حل مشکل‌گشایی معادلات لگاریتمی است. حواست به این موضوع خیلی باشد.

**پاسخ تشریحی:**

$$f: \text{وارون} \Rightarrow x = \log_2^{9+y} \Rightarrow \frac{9+y}{9} = 2^x$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = 9(-1 + 2^x)$$

حال نقطه برخورد را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید  $2^x = t$

$$g = f^{-1} \Rightarrow 2^{2x} + 5 = 9(-1 + 2^x) \Rightarrow t^2 + 5 = 9(-1 + t)$$

$$\Rightarrow t^2 - 9t + 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 = 2^{x_1} \\ t = 7 = 2^{x_2} \end{cases}$$

$$\text{ضرب} \Rightarrow 14 = 2^{x_1+x_2} \Rightarrow x_1 + x_2 = \log_2^{14}$$

● — گروه آموزشی ماز — ●

۲۴- اگر اختلاف ریشه‌های معادله  $(\log_2^{4-x})(\log_2^{4x}) = k$  برابر  $1/5$  باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

(۴) -۳

(۳) ۳

(۲) -۲

(۱) ۲

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۴



فرض کنید  $t = \log_2^x$  باشد:  $(\log_2^{4-x})(\log_2^{4x}) = k$

$$\Rightarrow (\log_2^{4-x} + \log_2^x)(\log_2^4 + \log_2^x) = k$$

$$\Rightarrow (-2+t)(2+t) = k \Rightarrow t^2 - 4 = k$$

$$\Rightarrow t = \pm\sqrt{4+k} \Rightarrow x = 2^{\sqrt{4+k}}, 2^{-\sqrt{4+k}} \Rightarrow 2^{\sqrt{4+k}} - 2^{-\sqrt{4+k}} = 1/5$$

$$2^{\sqrt{4+k}} = a \Rightarrow a - \frac{1}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+k} = 1 \Rightarrow k = -3$$

گروه آموزشی ماز

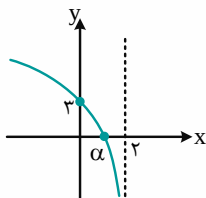
۲۵- نمودار تابع  $f(x) = a + \log_2^{(bx+c)}$  به صورت مقابل است. مقدار  $\alpha$  کدام است؟

(۲)  $\frac{3}{2}$

(۱)  $\frac{9}{5}$

(۴)  $\frac{5}{4}$

(۳)  $\frac{7}{4}$



(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۳



مجانِب قائم در نمودار لگاریتمی چه می‌کنه!

در تابع  $f(x) = \log_{h(x)}^{g(x)}$ ، ریشه (ریشه‌های) تابع  $g(x)$  مجانب‌های قائم تابع  $f(x)$  هستند.



دقت کنید که  $x = 2$  ریشه عبارت جلوی لگاریتم است.

$$\begin{cases} bx+c = 0 \xrightarrow{x=2} 2b+c = 0 \Rightarrow c = -2b \\ f(2) = 3 \Rightarrow a + \log_2^c = 3 \Rightarrow \log_2^c = 3-a \Rightarrow c = 2^{3-a} \end{cases}$$

$$a + \log_2^{(bx+c)} = 0 \Rightarrow bx+c = 2^{-a}$$

از طرفی،  $f(\alpha) = 0$  است، پس:

$$\Rightarrow bx+c = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow bx = -\frac{\gamma}{\lambda}$$

$$\Rightarrow bx = -\frac{\gamma}{\lambda}(-2b) \xrightarrow{b \neq 0} \alpha = \frac{\gamma}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- اگر  $a > 3$  و  $P = \log_{2\sqrt{a}}^{a^2}$  باشد، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار  $[P]$  کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

(متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۲



اینم یه نکته کوتاه!

$$\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$



چند تا ویژگی دیگه از لگاریتم رو ببینیم:

$$1) \log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$$

$$2) \log_c^{f(x)} = \log_c^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x) \quad (c \neq 1) (a, b, c > 0)$$

$$P = \frac{\log_3^9 a^7}{\log_3^{27} \sqrt{a}} = \frac{\log_3^9 + \log_3^9}{\log_3^{27} + \log_3^{\frac{1}{2}} a} = \frac{2 + 2 \log_3^9}{2 + \frac{1}{2} \log_3^9}$$

فرض کنید  $\log_3 a = t$  و چون  $a > 3$ ، پس  $t > 1$  است.

$$P = \frac{2 + 2t}{2 + \frac{1}{2}t} = \frac{4t + 4}{t + 6} = 6 - \frac{32}{t + 6}$$

$$t > 1 \Rightarrow t + 6 > 7 \Rightarrow 0 < \frac{32}{t + 6} < \frac{32}{7} \Rightarrow \frac{10}{7} < P < 6$$

$$1 \leq [P] \leq 5 \Rightarrow \max - \min = 5 - 1 = 4$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- اگر  $x = \alpha$  جواب معادله  $\log_6^2(x+2) = (x+2) \log_6^{(2^x-2)} + 1$  باشد، حاصل لگاریتم  $2^{\alpha-1}$  در پایه ۳ چقدر است؟

$$\frac{1}{2} (4)$$

$$\sqrt{2} (3)$$

$$2 (2)$$

$$1 (1)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۱

چند تا ویژگی دیگه از لگاریتم رو ببینیم:

$$1) \log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$$

$$2) \log_c^{f(x)} = \log_c^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x) \quad (c \neq 1) (a, b, c > 0)$$

بجای ۱، می نویسیم  $\log_6^6$ .

$$\log_6^{(2^x-2)} + \log_6^6 = \log_6^{2^{x+2}} \Rightarrow \log_6^{(2^x-2)} = \log_6^{2^{x+2}}$$

$$\Rightarrow 6(2^x - 2) = 2^{x+2} \Rightarrow 6 \times 2^x - 12 = 4 \times 2^x \Rightarrow 2^x = 6$$

$$\Rightarrow 2^\alpha = 6 \Rightarrow 2^{\alpha-1} = 3 \Rightarrow \log_3^{2^{\alpha-1}} = 1$$

گروه آموزشی ماز

۲۸- اگر  $a$  و  $b$  ریشه متمایز معادله  $\log_3^2 \frac{x^2}{x+b} = \log_3^2 \frac{x^2}{x+b}$  باشند، مقدار  $3^a$  کدام است؟

$$\frac{2}{3} (4)$$

$$\frac{3}{2} (3)$$

$$\frac{1}{3} (2)$$

$$\frac{1}{2} (1)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

ویژگی مهم لگاریتم: (تغییر مبنا)

$$\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} \quad \text{اگر } a, b, c > 0, c \neq 1, b, c \neq 1 \text{ باشند، داریم:}$$

ابتدا معادله را مرتب می کنیم:

$$x^2 - x \log_3^2 - b \log_3^2 = 0$$

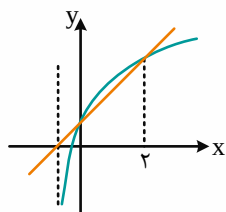
حال  $x = 1$  را آزمایش می کنیم:

$$1 - \log_3^2 - b \log_3^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{\log_3^2}{\log_3^2} = \log_3^2$$

از طرفی، ضرب ریشه‌ها برابر  $-b \log_3^2$  است و چون یکی از ریشه‌ها برابر یک است، پس:

$$a = -b \log_7^7 = -\log_7^7 \times \log_7^7 = -\log_7^7 \Rightarrow a = \log_7^7 \Rightarrow 7^a = \frac{7}{2}$$

گروه آموزشی ماز



۲۹- در شکل مقابل، نمودار تابع  $f(x) = \log_7^{(x+k)}$  رسم شده است. مقدار  $f^{-1}(2)$  چقدر است؟

- (۱) ۷  
(۲) ۶  
(۳) ۸  
(۴) ۳

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی:

خط رسم شده در شکل، از سه نقطه  $(-k, 0)$ ،  $(0, \log_7^k)$  و  $(2, \log_7^{(2+k)})$  عبور کرده است، پس:

$$\frac{\log_7^{(2+k)} - 0}{2+k} = \frac{\log_7^k - 0}{k} \Rightarrow k \log_7^{(2+k)} = (2+k) \log_7^k \Rightarrow \log_7^{(2+k)^k} = \log_7^{k^{(2+k)}}$$

$$\Rightarrow (2+k)^k = k^{(2+k)} \xrightarrow{(7^2=4^2)} k=2$$

$$\Rightarrow f(x) = \log_7^{(x+2)} \Rightarrow f^{-1}(2) = 7$$

گروه آموزشی ماز

۳۰- قیمت کالایی سالانه ۵ درصد افزایش می‌یابد. پس از چند سال قیمت کالا ۷ برابر می‌شود؟  $(\log 7 = 0.84, \log 15 = 1.18)$

(۴) ۴۵

(۳) ۴۲

(۲) ۴۰

(۱) ۳۸

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

پس از n سال قیمت کالا  $(1.05)^n$  برابر می‌شود.

$$(1.05)^n = 7 \Rightarrow n = \frac{\log 7}{\log 1.05} = \frac{\log 7}{\log 1.05 - 2} = \frac{\log 7}{\log 7 + \log 15 - 2}$$

$$= \frac{0.84}{0.84 + 1.18 - 2} = \frac{0.84}{0.02} = 42$$

گروه آموزشی ماز

## جمع بندی سریع

فب فسته نباشید! حالا بریم کل مباحث این آزمون رو به شکل نمودار درختی مرور کنیم تا به نقشه ذهنی خوب از این مباحث توی ذهنتون شکل بگیره!

نمایش زوج مرتبی: هیچ دو زوج مرتبی مولفه اول برابر نداشته باشند مگر اینکه مولفه دوم دو زوج مرتب نیز با هم برابر باشند.

نمایش نموداری: هر خط موازی محور  $y$  ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

نمایش پیکانی: از هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک پیکان خارج شود.

تابع

تابع ثابت:  $f(x) = C, C \in \mathbb{R}$

تابع همانی:  $f(x) = x$

تابع خطی:  $f(x) = ax + b$

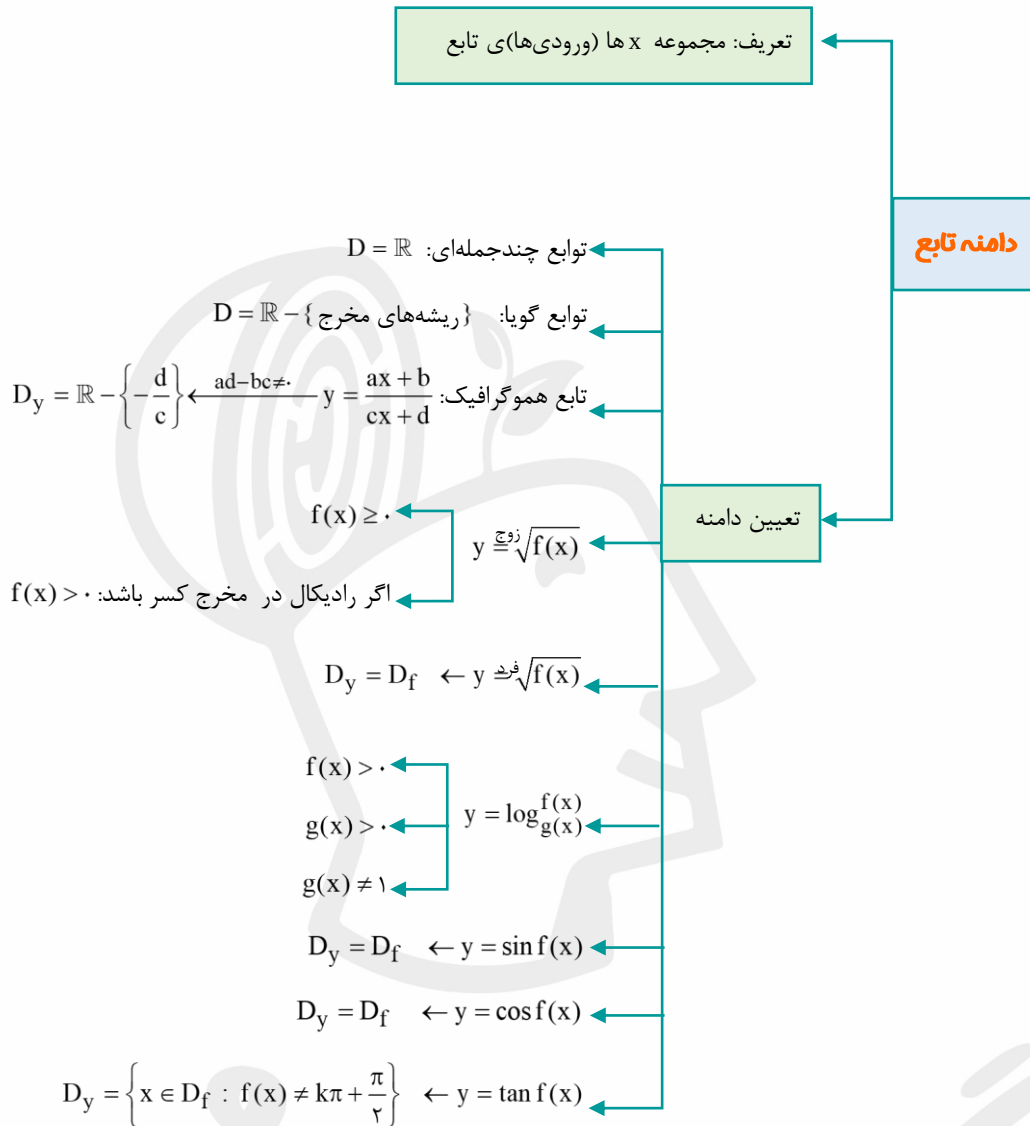
تابع جزء صحیح:  $f(x) = [g(x)]$

تابع قدرمطلق:  $f(x) = |g(x)|$

توابع مثلثاتی

توابع نمایی و لگاریتمی

انواع



تعریف: مجموعه  $y$  ها به ازای  $x$  های تابع

برد تابع

$$R = \mathbb{R} \leftarrow y = \log_a^x$$

$$R = (0, +\infty) \leftarrow y = a^x$$

$$R = [0, +\infty) \leftarrow y = \sqrt{x}$$

$$R = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\} \leftarrow \frac{ad-bc \neq 0}{y = \frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$R = [-1, 1] \leftarrow y = \sin x$$

$$R = [-1, 1] \leftarrow y = \cos x$$

$$R = \mathbb{R} \leftarrow y = \tan x$$

$$R = \left[ \frac{-\Delta}{4a}, +\infty \right) \leftarrow \begin{matrix} a > 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{matrix}$$

$$R = \left( -\infty, -\frac{\Delta}{4a} \right] \leftarrow \begin{matrix} a < 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{matrix}$$

برد توابع معروف

نمایش زوج مرتبی: مولفه اول و دوم تکراری نباشند و اگر مولفه دوم دو زوج مرتب با هم برابر باشند باید مولفه اول آن‌ها نیز با هم برابر باشند.

هر خط موازی محور  $y$  ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

هر خط موازی محور  $x$  ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

نمایش نموداری

تابع یک به یک

یک به یک های معروف

$$y = \log_a^x$$

$$y = a^x$$

$$y = \sqrt{ax + b}$$

$$(ad - bc \neq 0) \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

توابع مثلثاتی

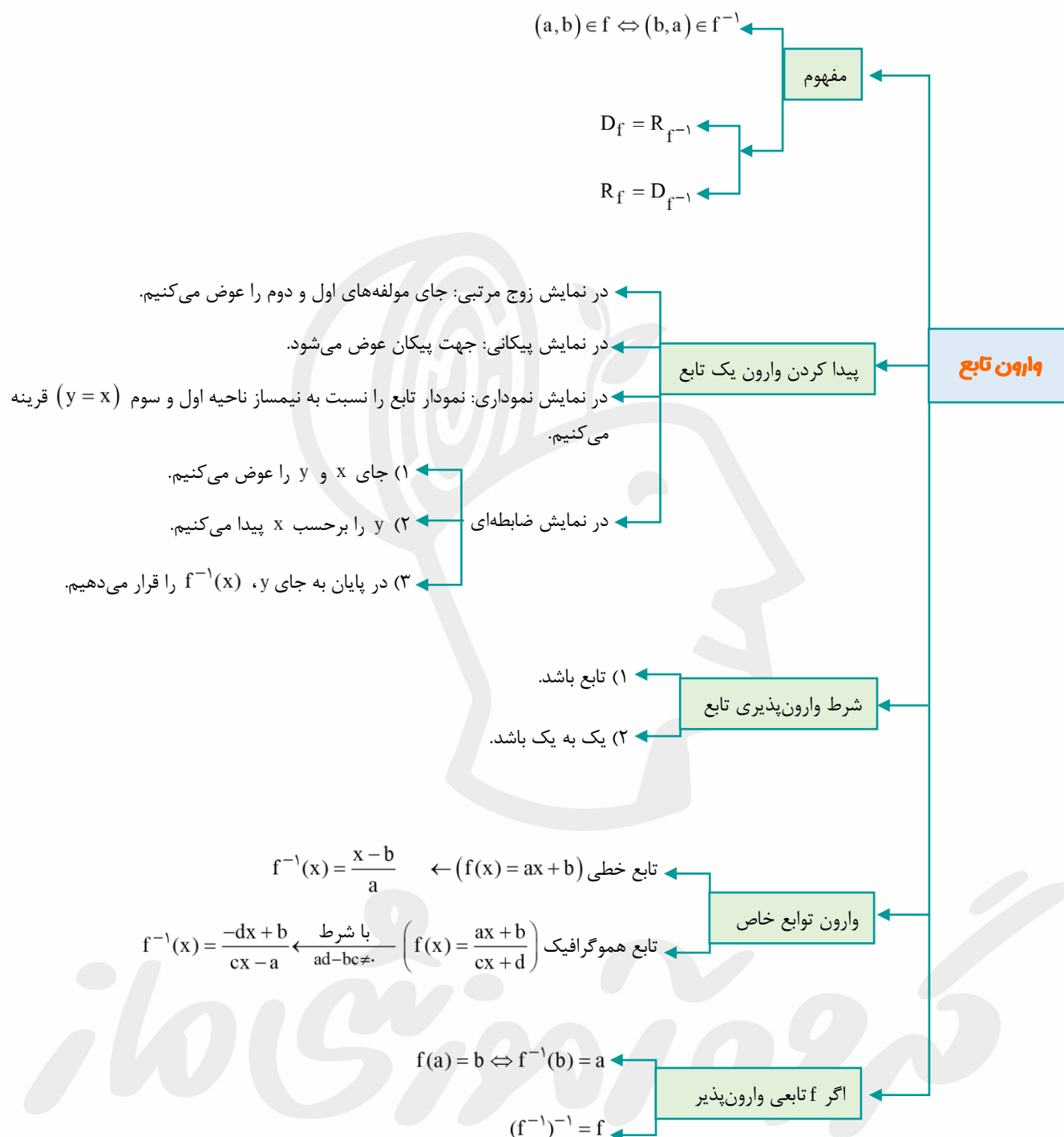
$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{تابع درجه دوم}$$

$$y = |ax + b|$$

$$y = [ax + b]$$

غیر یک به یک های معروف

گروه آموزشی ماز



$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

ضابطه‌ها

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

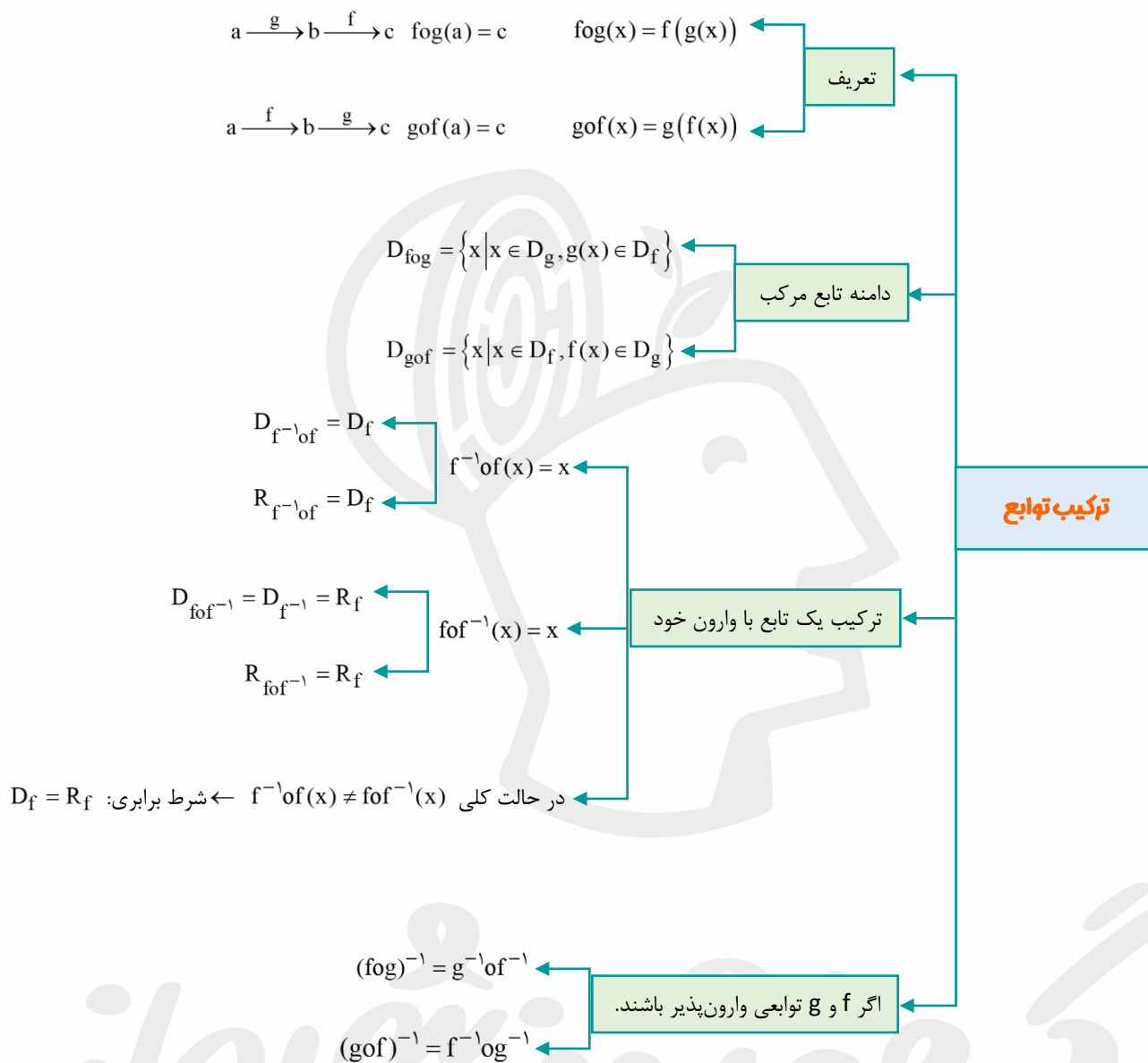
$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

دامنه

اعمال جبری روی توابع

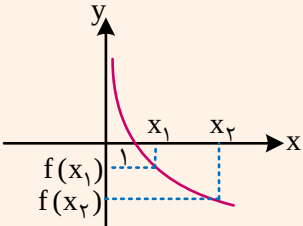
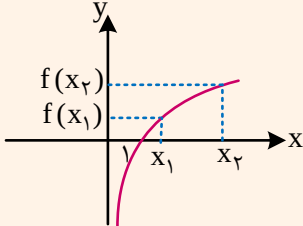
**توجه:** اعمال روی توابع، فقط به ازای دامنه مشترک (مولفه اول مشترک در نمایش زوج مرتبی) صورت می‌گیرد.

| نمودار جدید<br>( $a, k > 0$ ) | توضیحات و نحوه رسم                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f(x + a)$                    | نمودار تابع $f$ را به اندازه $a$ واحد در راستای محور $x$ ها به سمت چپ منتقل می کنیم.                                                                                                   |
| $f(x - a)$                    | نمودار تابع $f$ را به اندازه $a$ واحد در راستای محور $x$ ها به سمت راست منتقل می کنیم.                                                                                                 |
| $f(x) + a$                    | نمودار تابع $f$ را به اندازه $a$ واحد در راستای محور $y$ ها به سمت بالا منتقل می کنیم.                                                                                                 |
| $f(x) - a$                    | نمودار تابع $f$ را به اندازه $a$ واحد در راستای محور $y$ ها به سمت پایین منتقل می کنیم.                                                                                                |
| $f(-x)$                       | نمودار تابع $f$ را نسبت به محور $y$ ها قرینه می کنیم.                                                                                                                                  |
| $-f(x)$                       | نمودار تابع $f$ را نسبت به محور $x$ ها قرینه می کنیم.                                                                                                                                  |
| $-f(-x)$                      | نمودار تابع $f$ را ابتدا نسبت به محور $x$ ها و سپس نسبت به محور $y$ ها قرینه می کنیم (قرینه نسبت به مبدأ مختصات)                                                                       |
| $f(kx)$                       | <div> <div><math>k &gt; 1</math></div> <div>نمودار تابع <math>f</math> را در راستای محور <math>x</math> ها با ضریب <math>\frac{1}{k}</math> منقبض (فشرده) می کنیم.</div> </div>        |
|                               | <div> <div><math>0 &lt; k &lt; 1</math></div> <div>نمودار تابع <math>f</math> را در راستای محور <math>x</math> ها با ضریب <math>\frac{1}{k}</math> منبسط (کشیده) می کنیم.</div> </div> |
| $kf(x)$                       | <div> <div><math>k &gt; 1</math></div> <div>نمودار تابع <math>f</math> را در راستای محور <math>y</math> ها با ضریب <math>k</math> منبسط (کشیده) می کنیم.</div> </div>                  |
|                               | <div> <div><math>0 &lt; k &lt; 1</math></div> <div>نمودار تابع <math>f</math> را در راستای محور <math>y</math> ها با ضریب <math>k</math> منقبض (فشرده) می کنیم.</div> </div>           |
| $ f(x) $                      | ابتدا نمودار تابع $f$ را رسم کرده و سپس هر آنچه زیر محور $x$ ها قرار دارد را نسبت به محور $x$ ها قرینه می کنیم.                                                                        |
| $f( x )$                      | ابتدا نمودار تابع $f$ را رسم کرده و سپس هر آنچه در سمت راست محور $y$ ها قرار دارد را در سمت چپ کپی می کنیم.                                                                            |





تابع لگاریتمی  $y = \log_a x$

| $0 < a < 1$                                                                             | $a > 1$                                                                                 | وضعیت                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
|        |       | نمودار                    |
| $(0, +\infty)$                                                                          | $(0, +\infty)$                                                                          | دامنه                     |
| $\mathbb{R}$                                                                            | $\mathbb{R}$                                                                            | برد                       |
| <p>اکیداً نزولی و یکنوا</p> $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$                 | <p>اکیداً صعودی و یکنوا</p> $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$                 | وضعیت یکنوایی             |
| یک‌به‌یک و وارون‌پذیر                                                                   | یک‌به‌یک و وارون‌پذیر                                                                   | وضعیت یک‌به‌یک بودن       |
| در نقطه $(1, 0)$ محور $x$ ها را قطع می‌کند.                                             | در نقطه $(1, 0)$ محور $x$ ها را قطع می‌کند.                                             | وضعیت نسبت به محور $x$ ها |
| برخورد ندارد                                                                            | برخورد ندارد                                                                            | وضعیت نسبت به محور $y$ ها |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ | وضعیت حدی                 |

ویژگی‌های لگاریتم

| ویژگی                                                              | مثال                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\log_a 1 = 0$                                                     | $\log_7 1 = 0$                                                                                                         |
| $\log_a a = 1$                                                     | $\log_7 7 = 1$                                                                                                         |
| $\log_a b^n = n \log_a b$                                          | $\log_{\Delta} 125 = \log_{\Delta} 5^3 = 3 \log_{\Delta} 5$                                                            |
| $\log_a b^m = \frac{m}{n} \log_a b$                                | $\log_{\sqrt{10}} (10) = \log_{10^{\frac{1}{2}}} 10 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_{10} 10 = 2 \log_{10} 10 = 2$         |
| $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$                                  | $\log_{\sqrt{2}} 4 + \log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{\sqrt{2}} 32 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^5 = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$ |
| $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$            | $\log_7 49 - \log_7 7 = \log_7 7 = 1$                                                                                  |
| $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (تغییر مبنا)                | $\log_7 49 = \frac{\log_{10} 49}{\log_{10} 7} = \frac{1.69}{0.84} \approx 2$                                           |
| $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$                                      | $(10)^{\log_2 10} = (2)^{\log_2 10} = 10$                                                                              |
| $\log_a b \times \log_b c \times \dots \times \log_n m = \log_a m$ | $\log_7 49 \times \log_{49} 7 = \log_7 7 = 1$                                                                          |
| $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$                                    | $\log_7 49 = \frac{1}{\log_{49} 7}$                                                                                    |

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$(t = a^x) \text{ روش تغییر متغیر}$$

روش رسم هندسی

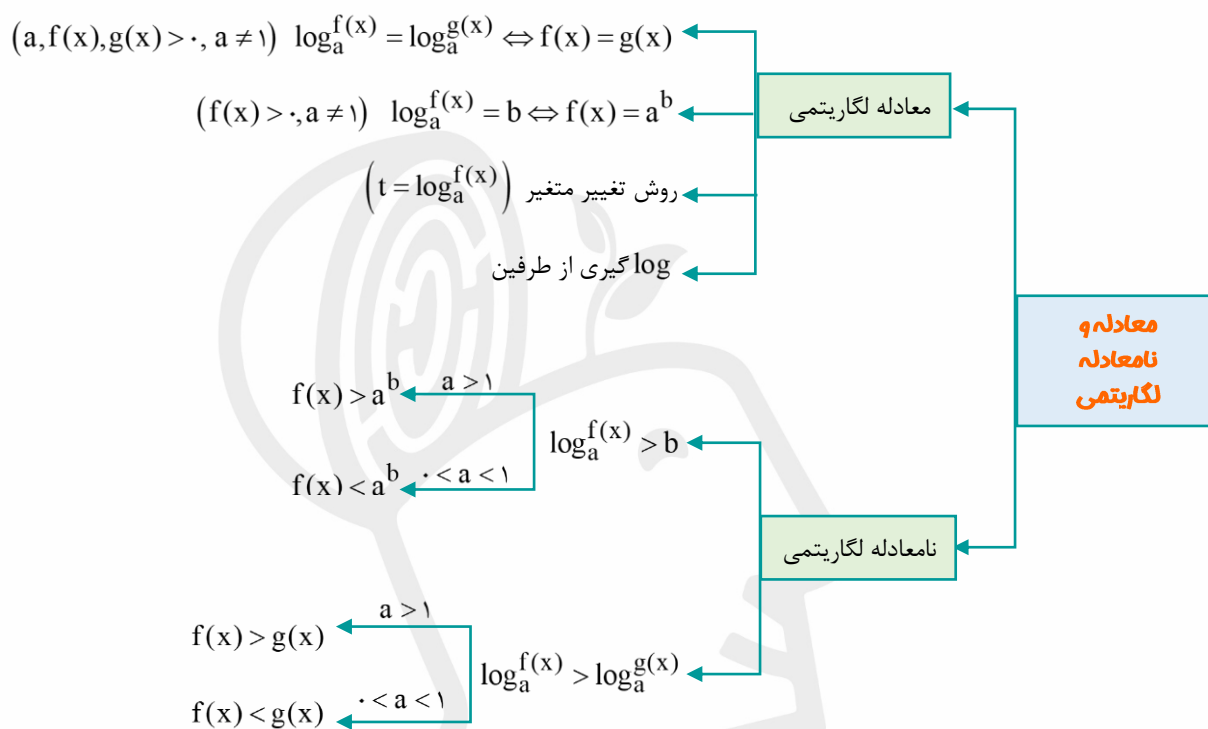
معادله نمایی

معادله و نامعادله نمایی

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) : a > 1$$

نامعادله نمایی

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) : 0 < a < 1$$



گروه آموزشی ماز